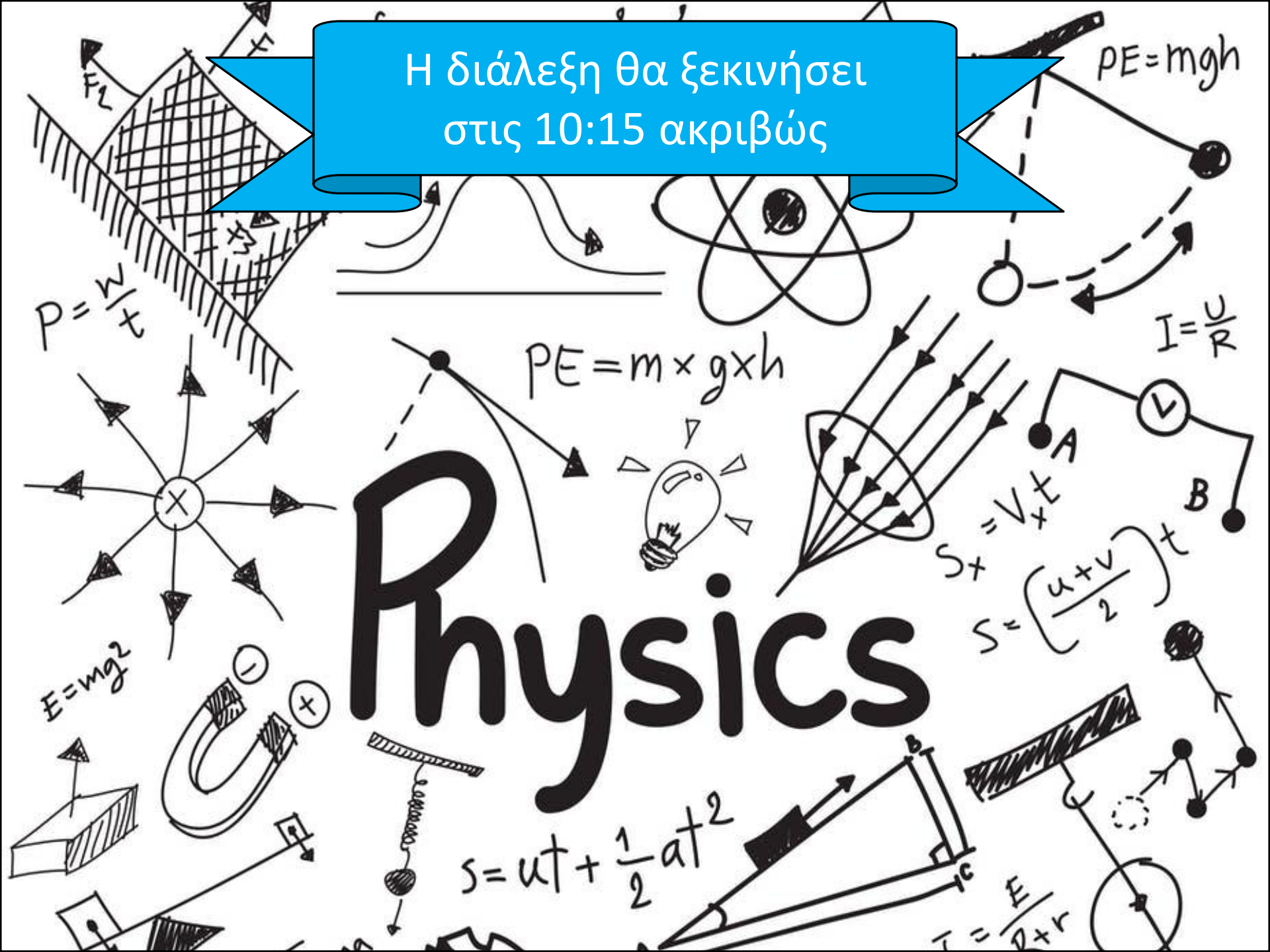


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:15 ακριβώς

Physics





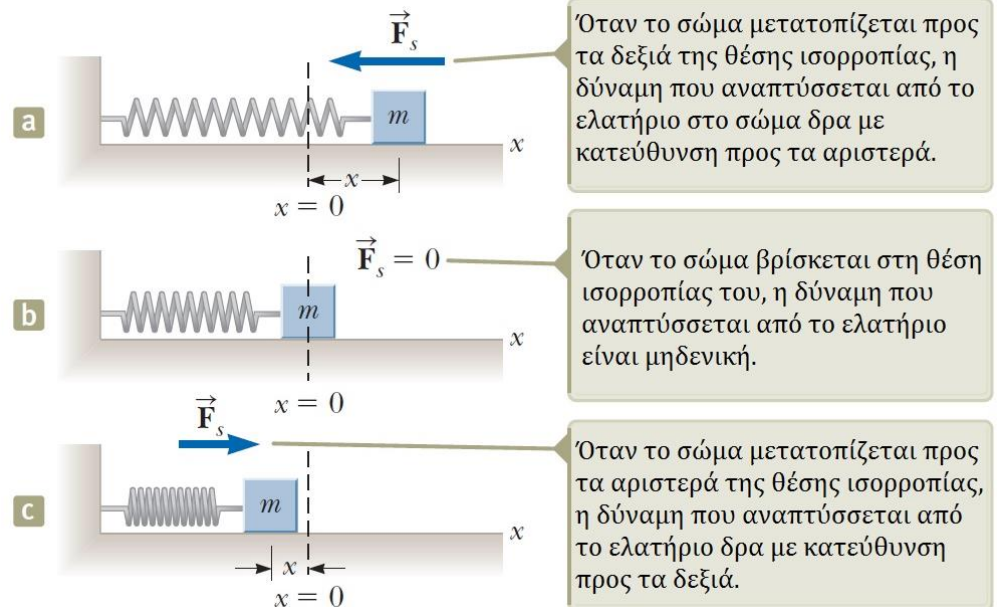
Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (review...)

- Ορισμός: Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σώμα λέγεται **Απλή Αρμονική Κίνηση / Ταλάντωση**
- Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση (ποια;) ☺



Απλή Αρμονική Ταλάντωση (review...)

- Συναρτηση θέσης: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$
- Κυκλική συχνότητα: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
- Συχνότητα: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Στιγμιαία ταχύτητα: $u = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = u(t)$
- Στιγμιαία επιτάχυνση: $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = a(t)$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (review...)

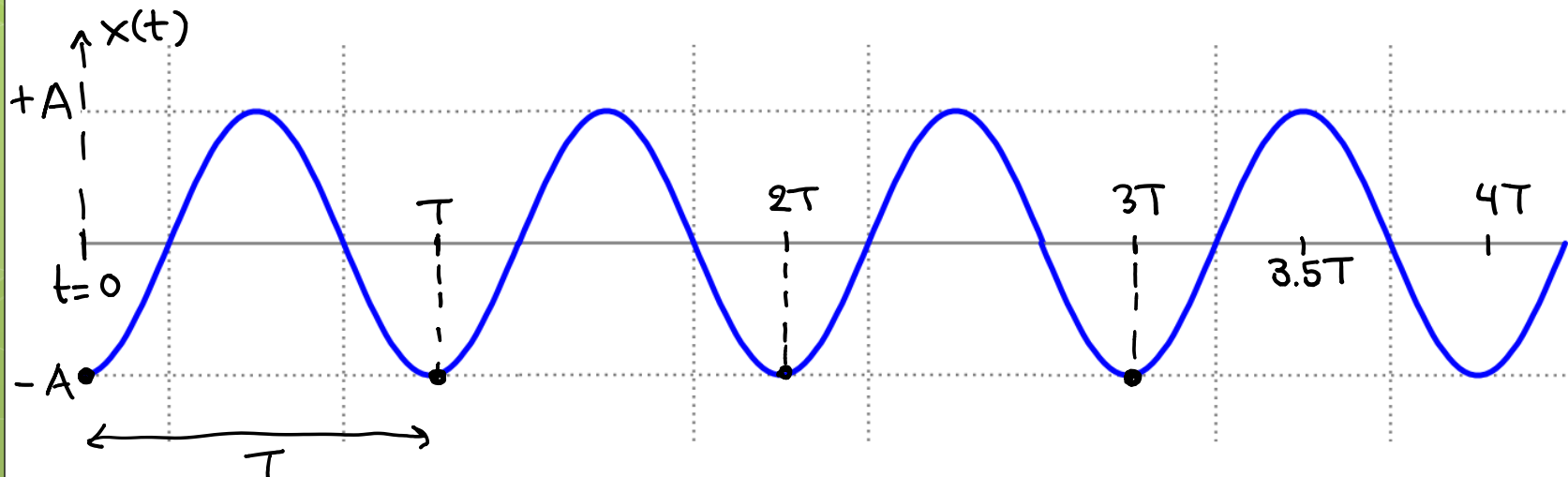
Quiz:

- Ένα σωματίδιο εκτελεί ΑΑΤ με περίοδο T , και για χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $-A$. Σε ποιά θέση βρίσκεται για

(α) $t = 2T \rightsquigarrow x(2T) = -A$

(β) $t = 3.5T \rightsquigarrow x(3.5T) = +A$

(γ) $t = 5.25T \rightsquigarrow x(5.25T) = 0$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

- Κινητική Ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

- Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

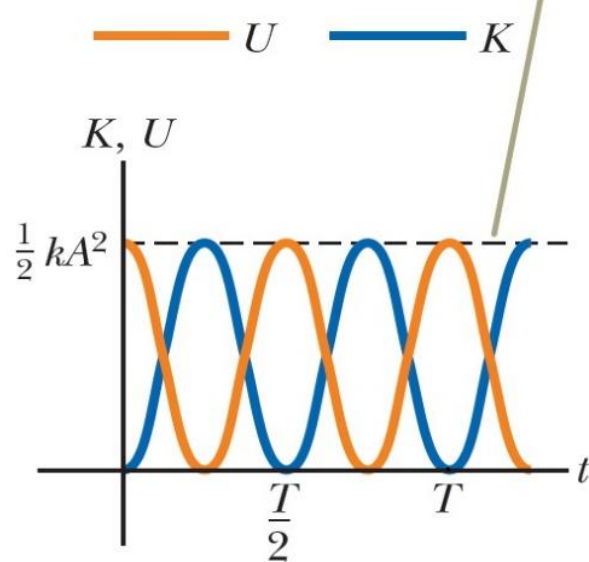
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

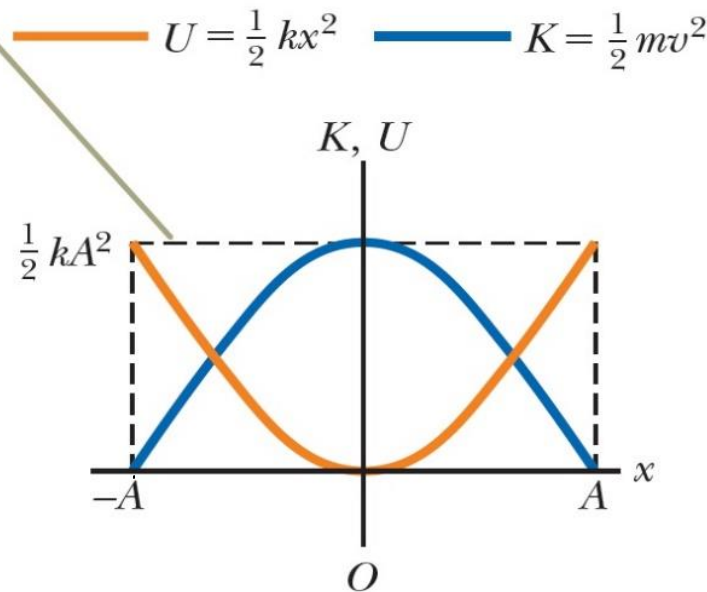
Μηχανική Ενέργεια $K + U$

Το άθροισμα $K + U$ είναι
σταθερό και στα δυο
γραφήματα

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



a



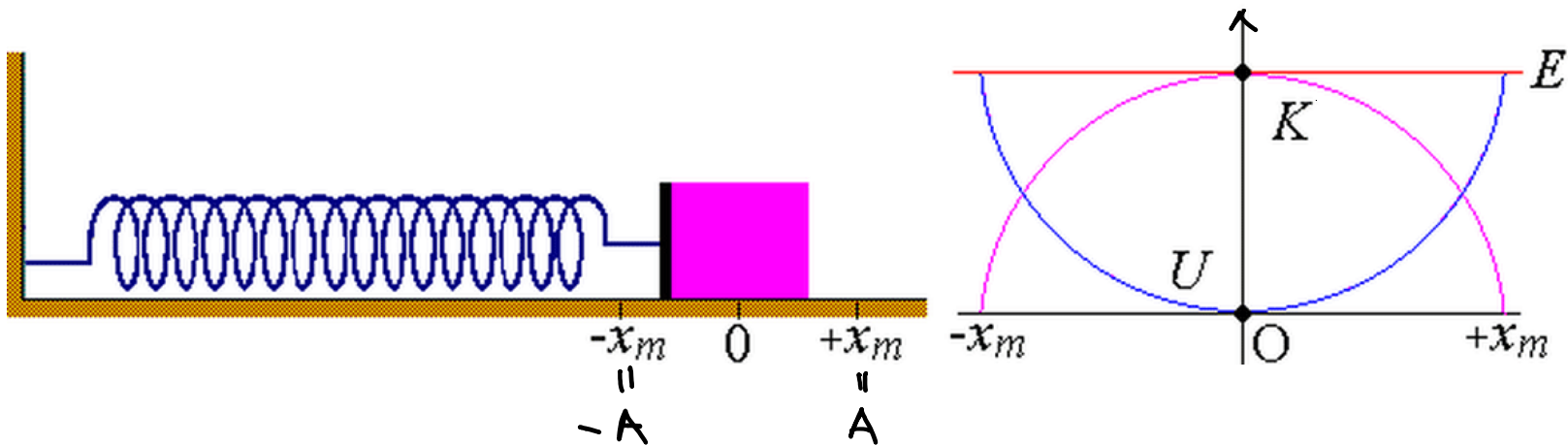
b

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή
 - Μηχανική Ενέργεια $K + U$

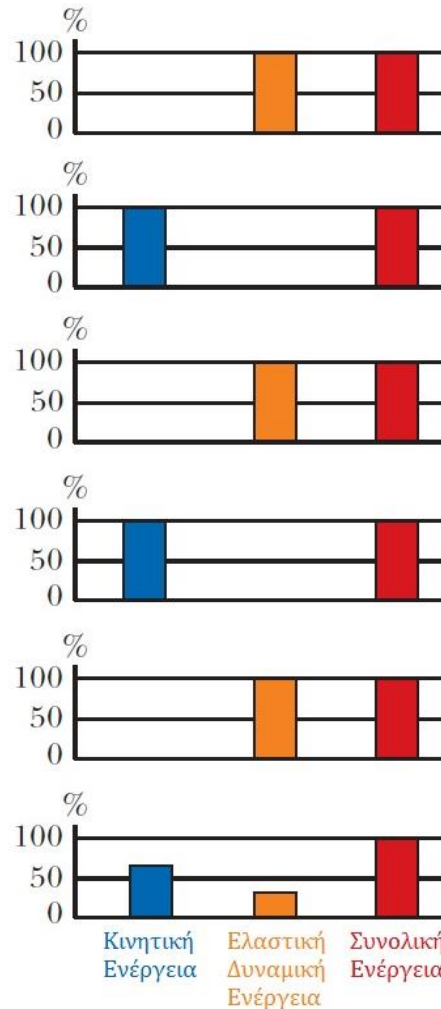
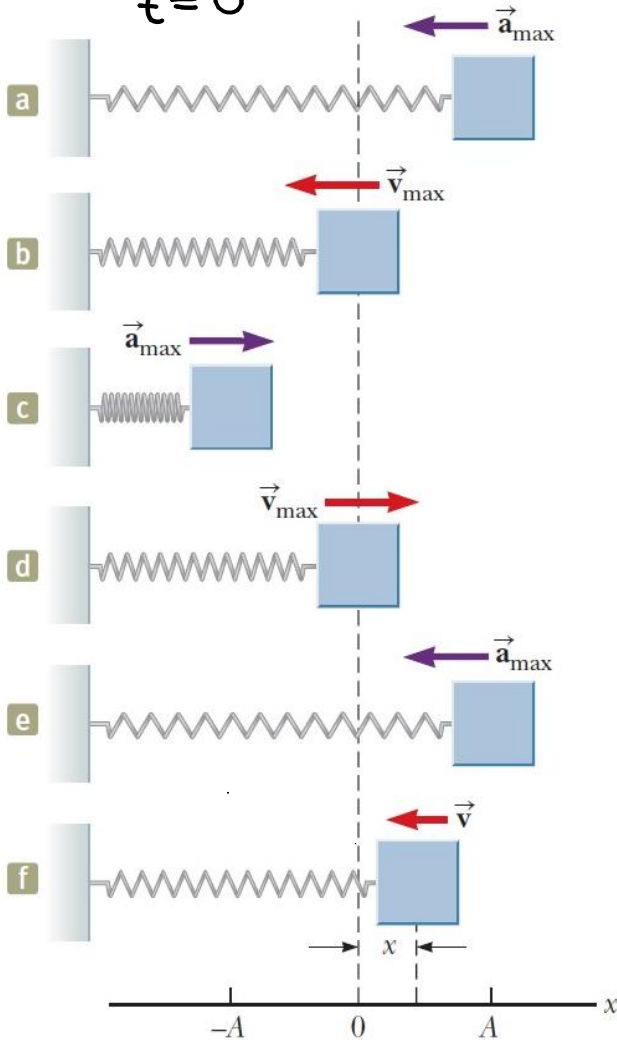
$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

- Αν $A = x_m$:



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$t = 0$

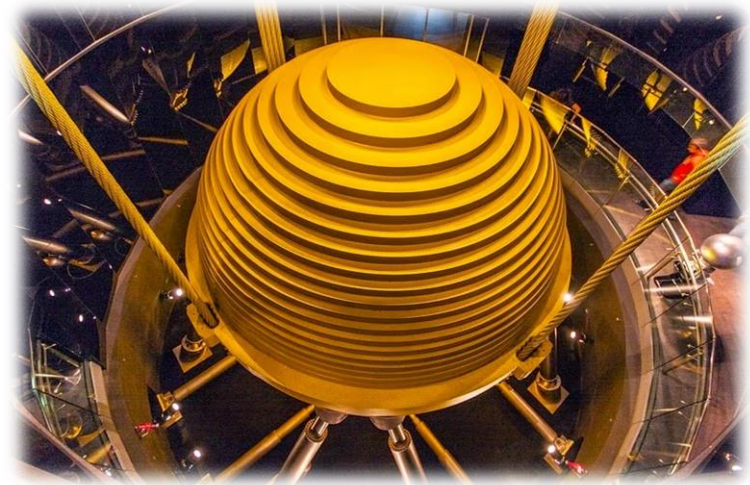


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, οι οποίοι είναι συσκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η συσκευή έχει μάζα $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$ και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10.0 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
- ◉ Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
- ◉ Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Συσκευή μάζας $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
 - ◉ Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
 - ◉ Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?

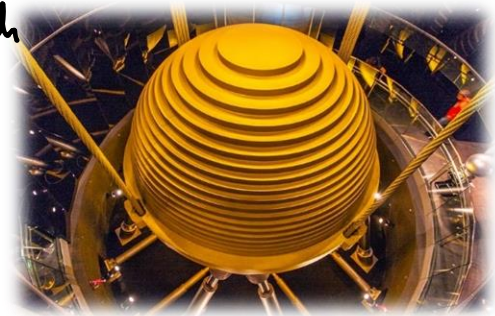
Α) Ξέραμε ότι $E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} k A^2$. $k = ?$ Από τη συχνότητα f έχουμε $\omega = 2\pi f = 2\pi 10 \text{ rad/s}$, επίσης Ξέραμε ότι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow k = \omega^2 m = (2\pi 10)^2 \cdot 2.72 \cdot 10^5 \cong 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Άρα $E_{\text{mech}} \cong 2.14 \times 10^7 \text{ J}$

Β) Ξέραμε ότι η ταχύτητα είναι η μέγιστη δυνατή, $u(x=0) = u_{\text{max}}$.

Είναι $E_{\text{mech}} = K + U \xrightarrow{u=u_{\text{max}}} K_{\text{max}} + 0 = E_{\text{mech}}$

Άρα $K_{\text{max}} = \frac{1}{2} m u_{\text{max}}^2 = 2.14 \times 10^7 \text{ J} \Rightarrow$

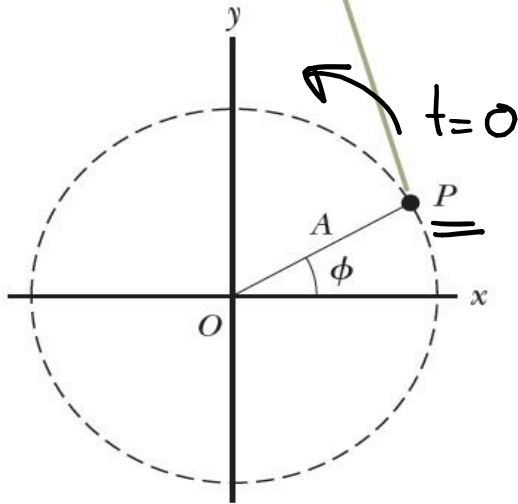
$$\Rightarrow u_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{mech}}}{m}} \cong 12.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

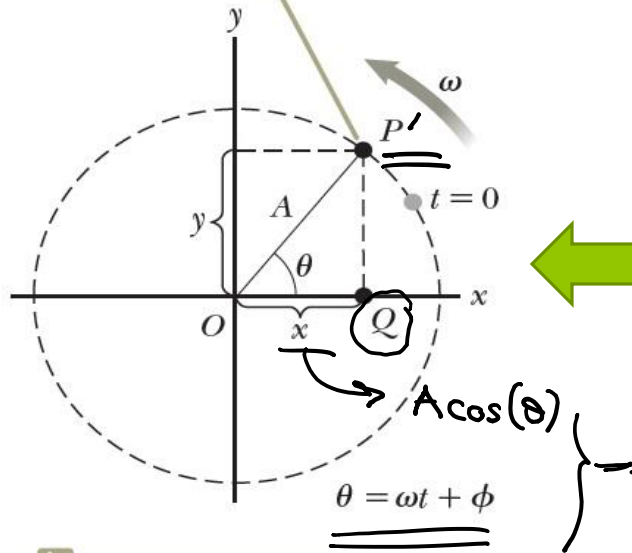
● Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

Ένα σώμα βρίσκεται στο σημείο P όταν $t=0$.



a

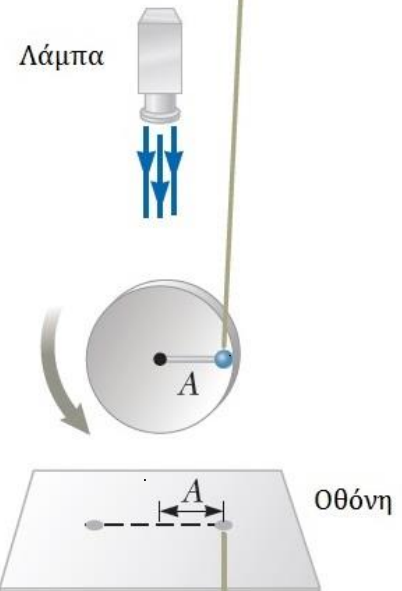
Λίγο αργότερα, τη χρονική στιγμή t, οι x-συνιστώσες των σημείων P και Q είναι ίσες.



b

$$\Rightarrow x = A \cos(\omega t + \phi)$$

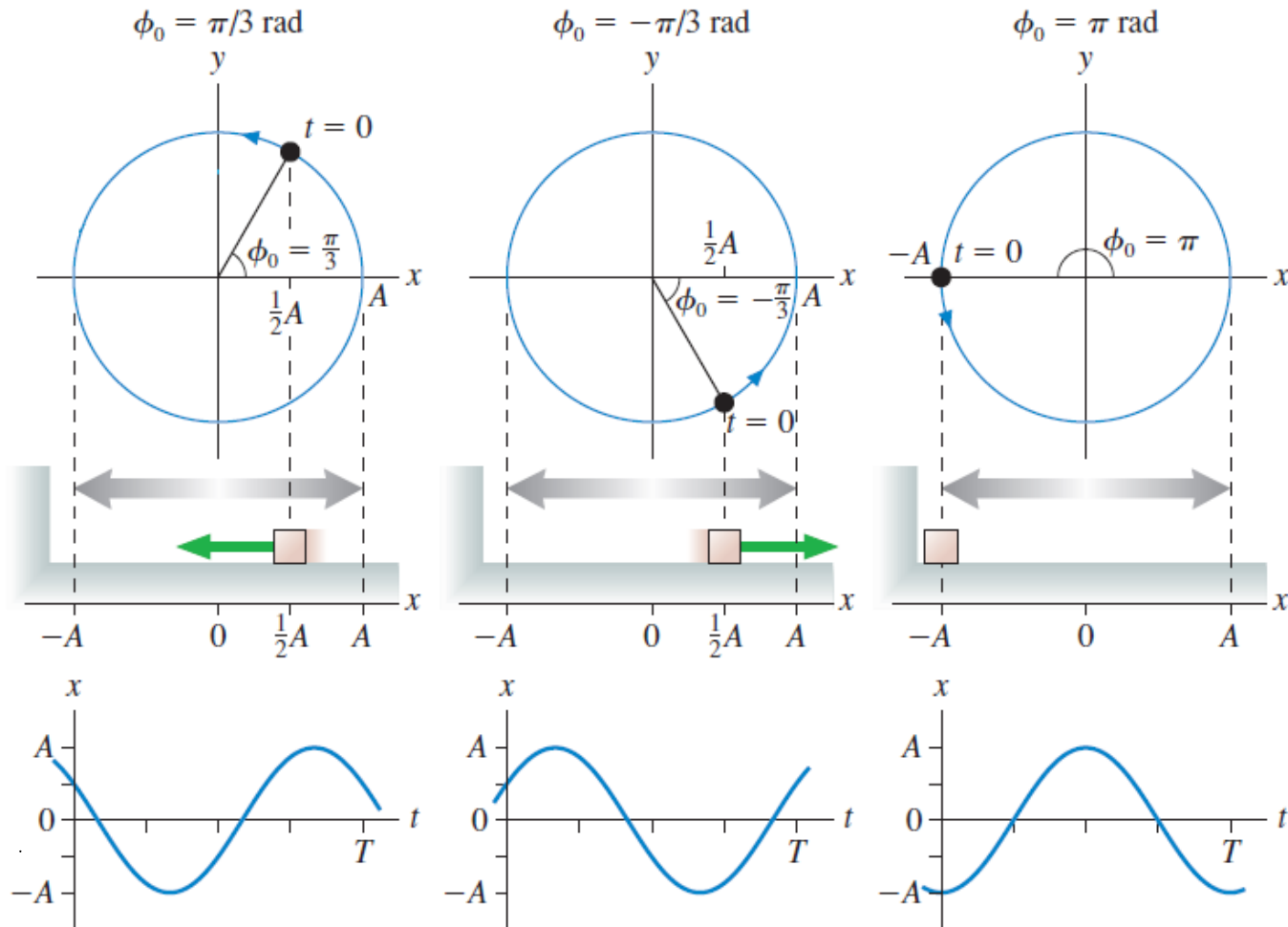
Η μπίλια γυρίζει και συμπεριφέρεται ως σωματίδιο σε ομοιόμορφη κυκλική κίνηση.



Η σκιά της μπάλας κινείται όπως ένα σωματίδιο σε απλή αρμονική κίνηση.

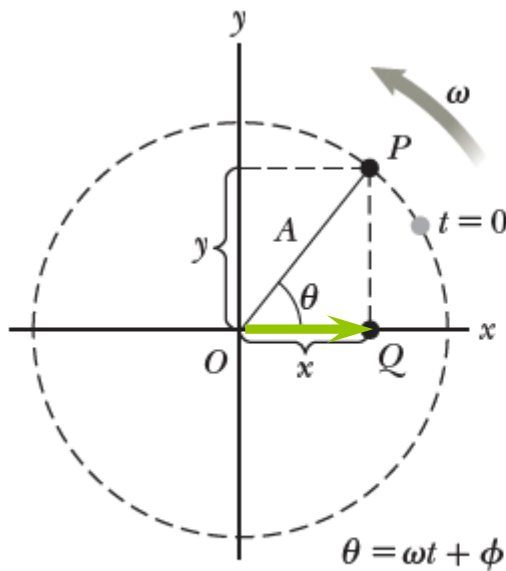
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

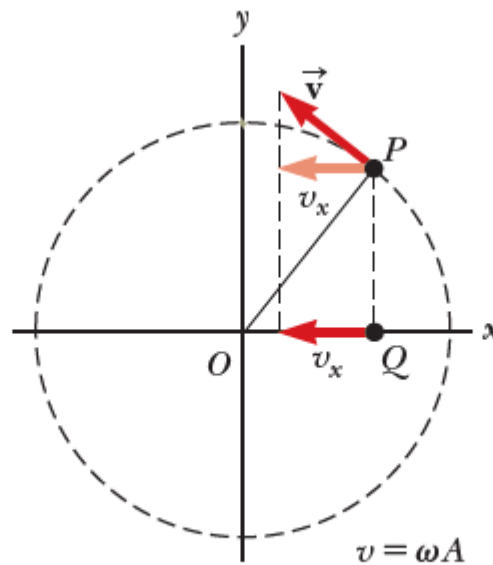


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

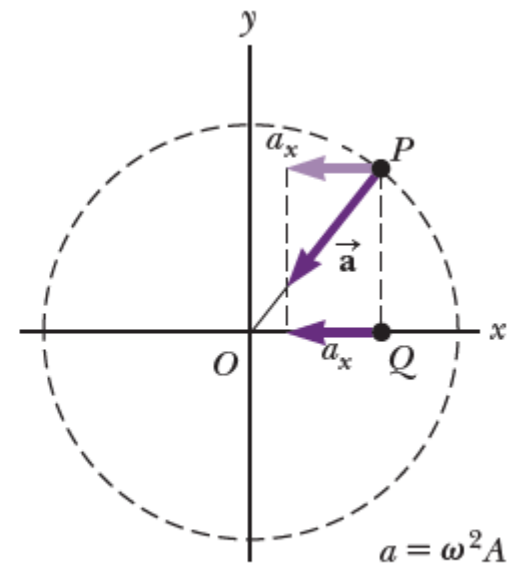
- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



b



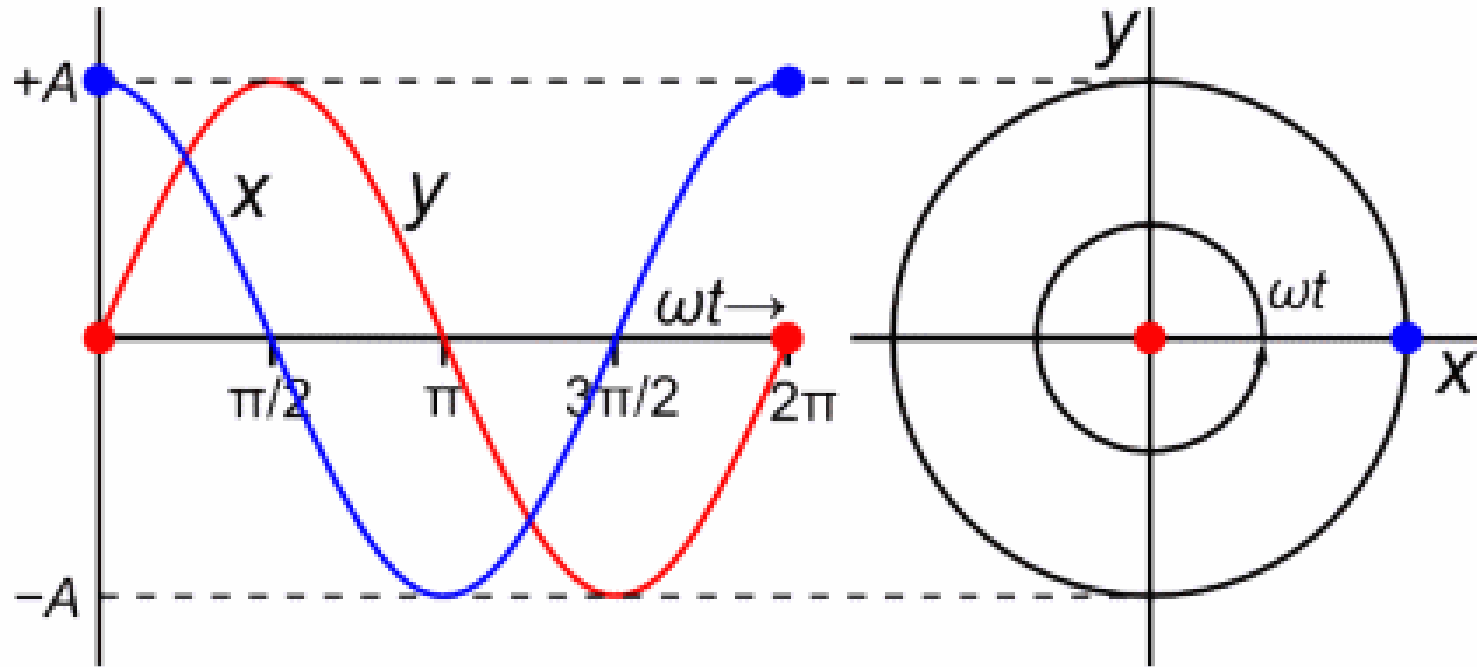
c



d

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

● Το εκκρεμές

- Όταν η γωνία θ είναι $< 10^\circ$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση

$$F_{\varepsilon\pi} = ma \Leftrightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Επειδή $s = L\theta$,

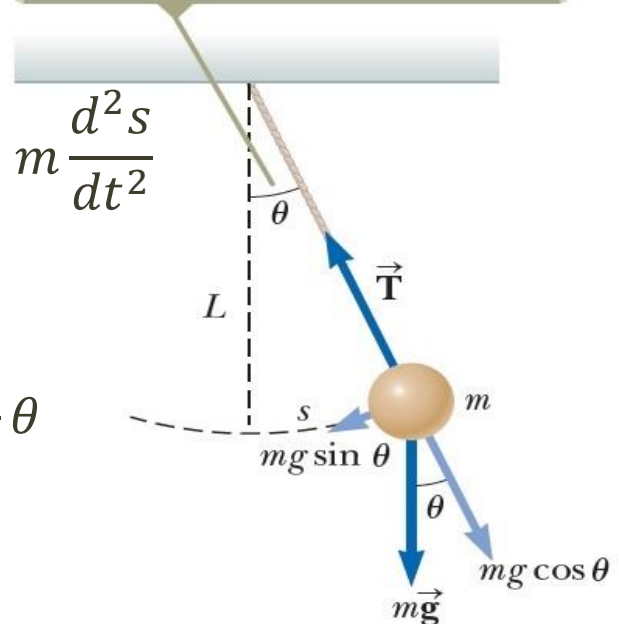
$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \approx -\frac{g}{L} \theta$$

όταν θ μικρό.

- Εδώ χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση
 $\sin(\theta) \approx \theta$

για μικρές τιμές του θ (σε rad)

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
- Θυμηθείτε για το ελατήριο που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!!
- Άρα το εκκρεμές μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για μικρό θ !

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

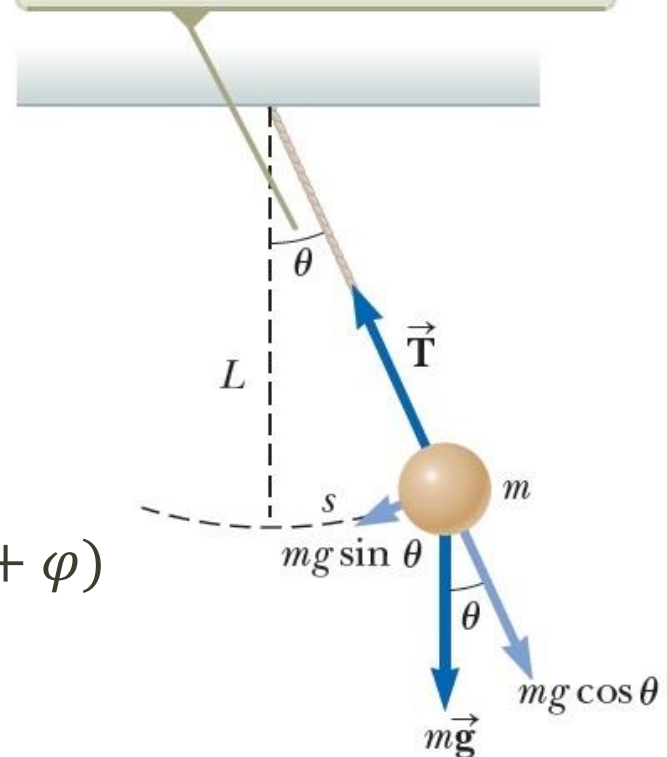
- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι φθίνουσα ταλάντωση

- Πιο κοντά στην πραγματικότητα:

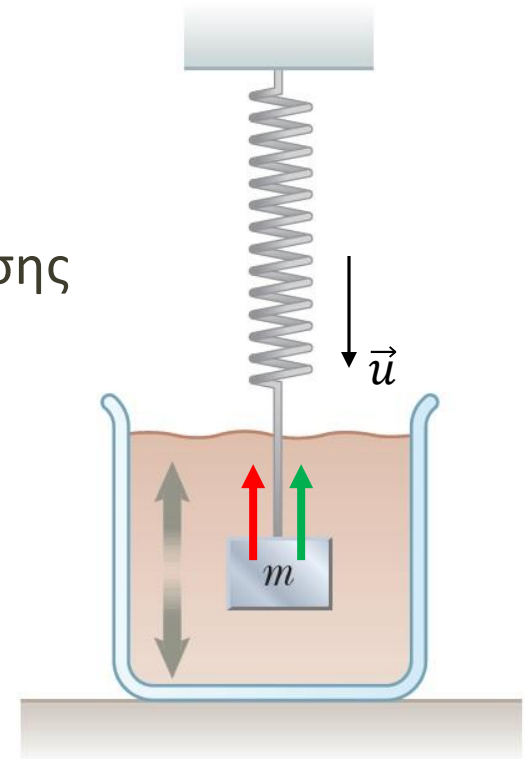
- τριβές, αντίσταση αέρα

- $\vec{R} = -b\vec{v} = -b \frac{d\vec{x}}{dt}$: δύναμη επιβράδυνσης

- Συντελεστής απόσβεσης b

- Δρα πάντα **αντίθετα στην ταχύτητα** του σώματος

- $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

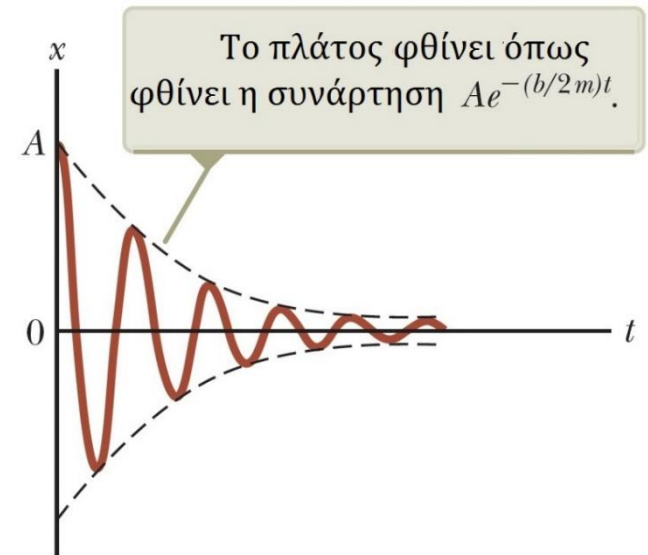
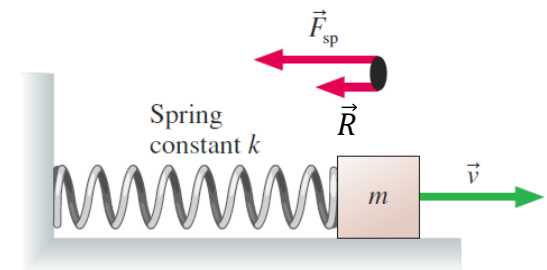
$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- Ενναλλακτικά,

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)$$





Συνεχίζεται...😊
